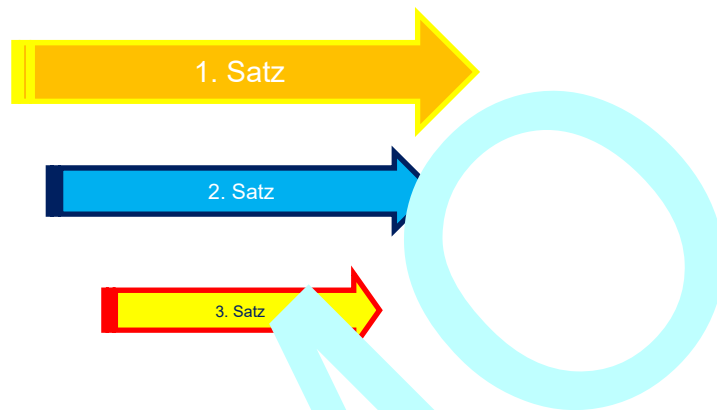


Dreisatzrechnungen



De. Nr. 1. 2.

Stand: 24. 11. 2019

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

In diesem Text zeige ich zuerst den Umgang mit dem traditionellen Dreisatz und dann, dass es sich dabei um quotientengleiche Paare handelt. Wer damit umgehen kann, löst die Aufgaben schneller. Dann folgen der umgekehrte Dreisatz und das Rechnen mit produktgleichen Paaren.

Ein Hinweis zur Verwendung der Maßeinheiten

Ich zeige zwei Rechnungen: $x = \frac{14 \text{ kg} \cdot 3}{2} = 21 \text{ kg}$ und $x = \frac{14 \cdot 3}{2} = 21 \text{ kg}$.

Die zweite Rechnung ist leider falsch. Zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens muss nämlich das Gleiche stehen. Und das tut es nicht, denn links steht „nur“ eine Zahl ($\frac{14 \cdot 3}{2}$), also 21, und rechts eine Größe (21 kg), nämlich eine Zahl mit einer Maßeinheit. Das ist nicht korrekt.

Achte darauf: Entweder auf beiden Seiten eine Maßeinheit oder gar keine!

Da man aber sehr oft doch beim Ergebnis andeuten will, worum es sich handelt, schreibe in so einem Fall die Maßeinheit in Klammern. Das kann dann so aussehen: $x = \frac{14 \cdot 3}{2} = 21 \text{ (kg)}$.

Das ist dann in Ordnung!

Inhalt

1	Motivation	3
2	Der einfache Dreisatz mit geraden Verhältnissen	4
2.1	Bitte mitdenken	4
2.2	Dreisatz-Beispiele zu proportionale Größen	6
2.3	Aufgaben 1 bis 7	10
3	Quotientengleiche Paare anstatt Dreisatz	14
3.1	Einführung	14
	Merkmale	17
3.2	Aufgaben 8 bis 12	18

Verwandte Texte:

10510	Dreisatz-Rechnungen
10511	Umgekehrter Dreisatz
10512	Proportionalitäten, Tabellen und Schaubilder
10513	Tripel und gekoppelte Dreisätze
10514	Theorie zu Zustandstripeln
10515	Aufgabensammlung zu dem allem.
10516	Linearität

1 Motivation

Stell dir vor du stehst in der Käseabteilung und möchtest Käse im Auftrag deiner Mutter kaufen. Du erfährst dort, dass 100 g Käse 1,20 € kosten. Du sollst aber 250 g Käse besorgen. Um den Preis dafür berechnen zu können, benötigst Du einen sogenannten **Dreisatz**.

Eine andere Situation. Stelle dir vor, dein Vater kommt nach Hause und beschwert sich, wie langsam doch wieder die Kollegen von der Fremdfirma vor Ort an der Baustelle waren. Er erzählt, dass er mit seinen drei Kollegen und 2 Maschinen normalerweise nur 4 Tage für eine Arbeit benötigt, für die die Fremdfirma mit 6 Arbeitern und 4 Maschinen 5 Tage berechnet. Kannst du die Überlegungen deines Vaters schon mathematisch begründen? Wenn nicht, mach dir keine Sorgen, denn du bald mit deinen Kenntnissen über den 'Dreisatz'.

2 Der einfache Dreisatz für „wachsende Zuordnungen“

2.1 Bitte mitdenken!

Stelle Dir vor, du gehst einkaufen. In der Bäckerei kostet 1 Brötchen 30 Cent. Eines reicht Dir aber nicht. Du überlegst daher: 2 Brötchen kosten 60 Cent, 3 Brötchen kosten 90 Cent und 5 Brötchen kosten 150 Cent, also 1,50 €.

Diese Rechnungen sind für dich sicher kein Problem, denn bei den beiden Größen „Anzahl der Brötchen“ und „Preis“ handelt es sich um wachsende Zuordnungen. Damit will man ausdrücken, dass sie im gleichen Verhältnis wachsen (zunehmen, aber auch abnehmen):

Wenn du die Menge verdoppelst, dann verdoppelt sich auch der Preis.

Wenn du die Menge verfünffachst, dann verfünffacht sich auch der Preis.

Zur 8-fachen Menge gehört der 8-fache Preis usw.

Diese einfachen Rechnungen nennt man Zweisatz. Sie hatten diese Form:

1 Brötchen kostet 30 Cent,
 $\downarrow \cdot 5$ $\downarrow \cdot 5$
 5 Brötchen kosten 5-mal so viel.

Rechenschema:
 mehr – desto mehr

Mit diesem Zweisatz haben wir von der Einheit auf eine größere Anzahl „hochgerechnet“.

Dazu wird der Einheitspreis mit der Zahl 5 multipliziert.

Das geht auch umgekehrt. Ein Freund informiert uns: 3 Brezeln kosten 1,50 € (150 Cent).

Nun können wir von der Anzahl 3 auf eine Einheit „herunterrechnen“:

3 Brezeln kosten 150 Cent,
 $\downarrow : 3$ $\downarrow : 3$
 1 Brezel kostet ein Drittel davon.

Rechenschema:
 Je weniger – desto weniger

Der Gesamtpreis wurde mit der Zahl 3 dividiert.

Nun hast du aber dieses Problem: Du sollst noch 5 Orangen mitbringen und liest am Obststand: 8 Orangen kosten 2 €. Wie viel kosten nun diese 5 Orangen?

Da du gerade alles verstanden hast, sollte dir diese Idee kommen:

Du rechnest vom Preis für 8 Orangen zuerst „herunter“ auf den Einheitspreis, also den von 1 Orange, und dann rechnest du „hinauf“ auf 5 Orangen. Dazu brauchst du nun 3 Sätze, also einen „**Dreisatz**“:

8 Orangen kosten 200 Cent
 $\downarrow : 8$ $\downarrow : 8$
 1 Orange kostet 200 Cent : 8 = 25 Cent
 $\downarrow \cdot 5$ $\downarrow \cdot 5$
 5 Orangen kosten 25 Cent · 5 = 125 Cent = 1,25 €

Die Pfeile zeigen, dass die Größen „Anzahl“ und „Preis“ in gleichem Verhältnis abnehmen und zunehmen. Solche Größen heißen auch **proportional**.

Jetzt sollst du noch Waschpulver mitbringen. Du entdeckst zwei Angebote: „Schnellwasch“ und „TopClean“. Allerdings sind die Packungen unterschiedlich groß:

Bei Schnellwasch kosten 2,5 kg genau 9 €

Bei TopClean kosten 2,4 kg genau 8,40 €.

Finde heraus, ob sie preislich gleichwertig sind, oder welches günstiger ist!

Wir können diese Aufgabe durch jeweils einen Zweisatz erledigen, indem wir zu beiden Waschmitteln den Einheitspreis (also den Preis für 1 kg) berechnen:

Schnellwasch:			TopClean:		
2,5 kg	kosten	9 €	2,4 kg	kosten	8,40 €
↓ : 2,5		↓ : 2,5	↓ : 2,4		↓ : 2,4
1 kg	kostet	$\frac{9 \text{ €}}{2,5} = 3,60 \text{ €}$	1 kg	kostet	$\frac{8,40 \text{ €}}{2,4} = 3,50 \text{ €}$

Also: TopClean ist preislich günstiger.

Eine andere Möglichkeit des Preisvergleichs ist folgende: Man rechnet nicht aus, wieviel für 1 kg ist, sondern wieviel man für 1 € bekommt. Das geht so:

Schnellwasch:			TopClean:		
Für 9 €	erhält man	2,5 kg	Für 8,40 €	erhält man	2,4 kg
↓ : 9		↓ : 9	↓ : 8,40		↓ : 8,40
Für 1 €	erhält man	$\frac{2,5 \text{ kg}}{9} \approx 0,278 \text{ kg}$	Für 1 €	erhält man	$\frac{2,4 \text{ kg}}{8,40} \approx 0,286 \text{ kg}$

Auch so erkennt man, dass TopClean preislich günstiger ist.

Ein Beispiel für umkehrende Zuordnungen.

Am Wochenende besucht Fritz die Oma. Für die 20 km braucht er 12 Minuten.
Wie lange braucht er, wenn er nur halb so schnell bzw. doppelt so schnell fährt?

Für Anfänger ist dies oft eine Falle, denn sie sagen ohne viel nachzudenken:

Wenn er doppelt so schnell fährt, braucht er auch doppelt so lange. Das ist natürlich Quatsch.

Bei doppelter Geschwindigkeit braucht er nur halb so lange
Bei halb so großer Geschwindigkeit braucht er doppelt so lange.

Die beiden Größen Geschwindigkeit und Fahrzeit verhalten sich also genau entgegengesetzt:

Nimmt die eine zu, dann nimmt die andere ab und umgekehrt.

Das Rechenschema lautet:

Je mehr – desto weniger
Je weniger – desto mehr

Fährt er also halb so schnell, braucht er 24 Minuten, fährt er doppelt so schnell, dann 6 Minuten.

Mit solchen Größen beschäftigen wir uns im Abschnitt 3

2.2 Dreisatz – Beispiele zu „proportionalen Größen“

- D1** Einem Arbeiter wurde bei einer wöchentlichen Arbeitszeit von 40 Stunden 480 € Lohn gezahlt. Wie hoch ist der Lohn bei einer wöchentlichen Arbeitszeit von 45 Stunden?

Ausführliches Lösungsschema

1. Schritt: Notiere das bekannte Wertepaar (**Bedingungs paar**)
2. Schritt: Notiere das Wertepaar mit der gesuchten Größe (**Fragesatz**).

Etwa so (wobei ich Stunden mit h abkürze):

Bedingungs paar: 40 h - 480 €
Fragesatz: 45 h - x €

Hinweis: Es erweist sich als günstig, die Paare so aufzuschreiben, dass die gesuchte Größe, deren Wert ich mit x bezeichne, rechts unten steht.

Nun berechnet man den Lohn für eine Zeiteinheit, von dem es man dann auf die 45 Stunden hochrechnen kann.

Jetzt: Herunterrechnen auf die Einheit, also auf den Lohn für 1 Stunde.

Wenn man statt 40 Stunden nur 1 Stunde erhält man $\frac{1}{40}$ von 480 €.

$\frac{1}{40}$ von 480 Euro = $\frac{1}{40} \cdot 480 = 12$ Euro. Man kann auch 480 Euro durch 40 teilen können, das ist das gleiche (Division entspricht der Multiplikation mit dem Kehrwert). Also hat man 12 € für 1 Stunde.

Für 1 Stunde bekommt der Arbeiter 12 Euro.

Dann: Hochrechnen auf die gegebenen 45 Stunden.

Für die in der Aufgabenstellung 45 Stunden erhält es 45-mal so viel Lohn: $45 \cdot 12 \text{ €} = 540 \text{ €}$

Das alles kann man kurz in dem Schema zusammenstellen:

Bedingungs paar:	40 h	480 €	: 40
	↓ : 40	↓ : 40	
Fragesatz:	45 h	$\rightarrow \frac{480}{40} \text{ €} = 12 \text{ €}$	· 45
	↓ · 45	↓ · 45	
Zwischensatz:	45 h	$\rightarrow x = 12 \text{ €} \cdot 45 =$	540 €

Hier stehen 3 Sätze. Darum heißt dieses Schema „Dreisatz“.

Zur Darstellung:

Ins Heft sollte man einen kurzen Text schreiben, etwa so:

Für 40 h erhält man 480 €
Für 1 h erhält man $\frac{480}{40} \text{ €} = 12 \text{ €}$
Für 45 h erhält man $12 \text{ €} \cdot 45 =$ 540 €

Mein Schema mit den Pfeilen ist zum Lernen übersichtlicher.

Nun zeige ich eine Vereinfachung, die bei manchen Aufgaben das Kopfrechnen etwas erleichtert.

Fortgeschrittene rechnen auf einen Wert herunter, der ein gemeinsamer Teiler der beiden Stundenangaben ist:

Gegeben sind die 40 Stunden und die 45 Stunden.

Beide Werte haben den **gemeinsamen Teiler 5**:

Es ist günstiger statt auf 1 h im Fragesatz nach 5 h zu fragen:

Bedingungspaar:	40 h	→	480 €
	↓ : 8		↓ : 8
Fragesatz:	5 h	→	$\frac{480}{8} \text{ €} = 60 \text{ €}$
	↓ · 9		↓ · 9
Zielsatz:	45 h	→	$60 \text{ €} \cdot 9 = 540 \text{ €}$

Worin liegt der Vorteil dieser Erkenntnis?

Bei der 1. Lösung musste man durch 40 dividieren und dann mit 45 multiplizieren.

Bei dieser Lösung dividiert man nur durch 8 und multipliziert mit 9. Das ist deutlich einfacher!

D2

8 Brötchen kosten 200 Cent. Wie teuer sind dann 12 Brötchen?

Ich zeige zweierlei Lösungen:

Dreisatz (über die Einheit 1 Brötchen)

Bedingungspaar:	8 Br.	→	200 ct
	↓ : 8		↓ : 8
Fragesatz:	1 Br.	→	$\frac{200}{8} \text{ ct} = 25 \text{ ct}$
	↓ · 12		↓ · 12
Zielsatz:	12 Br.	→	$25 \text{ ct} \cdot 12 = 300 \text{ ct} = 3 \text{ €}$

Dreisatz (über den gemeinsamen Teiler 4 Brötchen)

Bedingungspaar:	8 Br.	→	200 ct
	↓ : 2		↓ : 2
Fragesatz:	4 Br.	→	$\frac{200}{2} \text{ ct} = 100 \text{ ct}$
	↓ · 3		↓ · 3
Zielsatz:	12 Br.	→	$100 \text{ ct} \cdot 3 = 300 \text{ ct} = 3 \text{ €}$

In manchen Rechnungen ist dieser Zwischenschritt (Fragesatz) mit einem gemeinsamen Teiler eine deutliche Vereinfachung fürs Kopfrechnen.

Wenn man jedoch einen Taschenrechner benötigt, dann lohnt sich dieser Aufwand (gemeinsamen Teiler finden) nicht.

D3 Drei Brötchen kosten 120 Cent. Wie teuer sind dann 12 Brötchen?

Diese Aufgabe benötigt keinen Dreisatz, denn sie ist besonders einfach.

Wir kennen den Preis von 3 Brötchen und suchen den für 12 Brötchen.

Weil das genau die vierfache Menge ist, bezahlt man auch das Vierfache davon:

Bedingungspaar:	3 Brötchen	→	120 Cent		·4
Zielsatz:	12 Brötchen	→	120 ct · 4 =		480 ct.

Dies war der Zweisatz

3 Brötchen	kosten	120 Cent,
12 Brötchen	kosten das Vierfache, also	480 Cent

D4 Dein Freund hat für 120 SMS (Kurznachrichten) mit seinem Smartphone 800 ct bezahlt. Wie viel müsste er für 4 SMS bezahlen?

Diese Aufgabe löse ich zuerst als Dreisatz:

Bedingungspaar:	120 SMS	→ kosten →	800 ct	: 120
Fragesatz:	1 SMS	→	$\frac{800}{120} \text{ ct} = \frac{20}{3} \text{ ct} \approx 6,67 \text{ ct}$	·4
Zielsatz:	4 SMS	→	$\frac{20}{3} \text{ ct} \cdot 4 = \frac{80}{3} \text{ ct} \approx 26,67 \text{ ct}$	= 27 ct

Hier geht die Division durch 120 nicht auf, daher empfehle ich, mit gekürzten Brüchen zu rechnen und die Division erst am Ende zu machen. Dann wird aufgerundet.

Dieselbe Aufgabe kann man auch als Zweisatz rechnen.

Hast Du eine Idee, wie das geht?

Lösung zu D4 als Zweisatz

Man muss man erkennen, dass man mit einer Division von 120 SMS durch 30 direkt auf die 4 SMS kommt und somit den Fragesatz nicht mehr benötigt:

Bedingungspaar:	120 SMS	→	800 ct
	↓ : 30	↓ : 30	
Zielsatz:	4 SMS	→	$\frac{800}{30} \text{ ct} = \frac{80}{3} \text{ ct} = 26\frac{2}{3} \text{ ct} \approx 26,67 \text{ ct} = 27 \text{ ct}$

D5

Herr Gockel will für seine Hühner eine Wiese mit einem Maschendrahtzaun begrenzen. Er kauft insgesamt 20 m Zaun für 256 €.

- a) Wieviel kosten 35 m dieses Zauns?
b) Wie viel Zaun hätte er für 100 € kaufen können?

Lösung a) Mit Zwischenschritt 1 m. (Statt des Pfeiles schreibt man ins Heft „kosten“)

Bedingungspaar: 20 m → 256 € | : 20
 Fragesatz: 1 m → $\frac{256}{20} \text{ €} = 12,8 \text{ €}$ | · 35
 Zielsatz: 35 m → $12,8 \text{ €} \cdot 35 = 448 \text{ €}$

Kürzere Lösung mit dem gemeinsamen Teiler 5 m (Man teilt dann nur durch 4 statt durch 20!):

Bedingungspaar: 20 m → 256 € | : 4
 Fragesatz: 5 m → $\frac{256}{4} \text{ €} = 64 \text{ €}$ | · 7
 Zielsatz: 35 m → $64 \text{ €} \cdot 7 = 448 \text{ €}$

Lösung b)

Bedingungspaar: 256 € → 20 m | : 256
 Fragesatz: 1 € → $\frac{20}{256} \text{ m} = \frac{5}{64} \text{ m}$ | · 100
 Zielsatz: 100 € → $\frac{5}{64} \text{ m} \cdot 100 = \frac{5}{16} \cdot 10 \text{ m} = \frac{125}{16} \text{ m} = 7,8125 \text{ m}$

Die Heftversion mit Text statt Formeln:

Bedingungspaar: Für 256 € kommt man 20 m | : 256
 Fragesatz: Für 1 € bekommt man $\frac{20}{256} \text{ m} = \frac{5}{64} \text{ m}$ | · 100
 Zielsatz: Für 100 € bekommt man $\frac{5}{64} \text{ m} \cdot 100 = 7,8125 \text{ m}$

Bei nicht „geschönten“ Aufgaben erhält man oft Bruchzahlen bzw. Dezimalzahlen, die man dann am Ende runden muss: $\approx 7,81 \text{ m}$.

Hinweis:

Erfahrene Rechner können das Verfahren abkürzen und verwenden dazu nur die Rechnung im 3. Satz, in der die Division und die Multiplikation zusammengefasst sind.

Dies wird ausführlich im Abschnitt 2.4 besprochen. Es sieht dann so aus:

a) $x = \frac{256 \text{ €}}{20} \cdot 35 = 448 \text{ €}$
 b) $x = \frac{20 \text{ m}}{256} \cdot 100 = 7,8125 \text{ m} \approx 7,81 \text{ m}$

Ich erwähne dies für die Leser, die das schon kennen.

2.3 Aufgaben

Aufgabe 1

Ein Kasten Limonade mit 12 Flaschen kostet 21,60 Euro. Was kosten 5 Flaschen?

Aufgabe 2

35 Liter Benzin kosten 42 Euro.

- Wie viel Liter bekommt Herr Super für 30 Euro?
- Wieviel kosten 62 Liter?

Aufgabe 3

Heut zu Tage ist es wesentlich kostengünstiger, einfache Handwerkerarbeiten selber zu erledigen statt eine Firma zu rufen. Das dachte sich auch Herr Kannalles und kaufte 960 Fliesen für 648 Euro für sein neues Badezimmer. Doch irgendwo ist es in der Theorie einfacher als in der Praxis. 54 Fliesen sind im Laufe des Fliesenlegeverkehrs von Herrn Kannalles kaputt gegangen und müssen nachbestellt werden. Wie viel hat er dafür bezahlt?

Aufgabe 4

1 kg Aufschnitt kostet 8 Euro. Die Kundin möchte 350 Gramm davon haben. "Es sind 20g mehr geworden" sagt die Verkäuferin und rechnet 3 Euro.

Sind es wirklich genau 20 g mehr geworden?

Aufgabe 5

Klüngels neuer Wagen hat einen Drehzahlmesser. Er zeigt an, wie viel Umdrehungen pro Minute der Motor machen kann. Wenn Herr Klüngel im 4. Gang mit einer Geschwindigkeit von 105 km/h fährt, zeigt der Drehzahlmesser 4200 Umdrehungen pro Minute an.

- Wie viele Umdrehungen pro Minute zeigt der Drehzahlmesser an, wenn Herr Klüngel im 3. Gang mit 75 km/h fährt?
- Mit welcher Geschwindigkeit darf man im 4. Gang höchstens fahren, wenn 7000 Umdrehungen pro Minute keinesfalls überschritten werden dürfen?

Aufgabe 6

Herr Schindler meinte, für seinen Skiurlaub Schweizer Franken gekauft. Er erhielt für 250 € 275 CHF (man schreibt auch SFr dafür). Wie viele CHF hätte er für 400 € bekommen und wie viel € hätten 600 CHF gekostet?

Aufgabe 7

Herr Meckert plant seine Urlaubsreise. Er überprüft dazu den Benzinverbrauch seines Autos. Er fährt mit vollem Tank los und tankt nach 270 km. Dazu muss er 23 Liter nachfüllen.

- Bis zum Urlaubsort sind es 635 km. Mit welchem Spritverbrauch muss er rechnen?
- Wie weit kommt er mit einem vollen Tank, der 62 Liter fasst?